

說明：本試卷共計 30 題填充題，滿分 150 分。請依題號將答案填入答案卷中。

甲. 1~10 題每題 4 分

01. 小明一分鐘走 40 公尺，妹妹一分鐘走 32 公尺，現在兩人要向 960 公尺的地方出發，如果兩人希望同時到達的話，請問小明要比妹妹慢幾分鐘後再出發？

Ans: 6 分鐘

$$960 \div 32 - 960 \div 40 = 6$$

02. 一個長方形，如果長增加 2 公分，寬增加 5 公分，那麼面積就增加 60 平方公分，這時恰好是一個正方形。請問原來長方形的面積是多少平方公分？

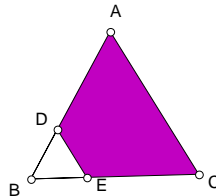
Ans: 40...

$$(x+2)(y+5) - xy = 60, x+2 = y+5 \Rightarrow x = y+3$$

$$\Rightarrow (y+5)^2 - (y+3)y = 60 \Rightarrow 7y + 25 = 60 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow xy = 40$$

03. 在正三角形 ABC 中，其邊長為 3，在線段 AB 及線段 BC 上，分別取一點 D 及 E，使線段 BD=1，線段 BE=1，則四邊形 ADEC 的周長是多少？

ANS: 8... $3 + (3-1) + (3-1) + 3 \times \frac{1}{3} = 8$



04. 「 $57.2 \div 0.32 = \quad \div 320$ 」，應填入多少？

Ans: 57200

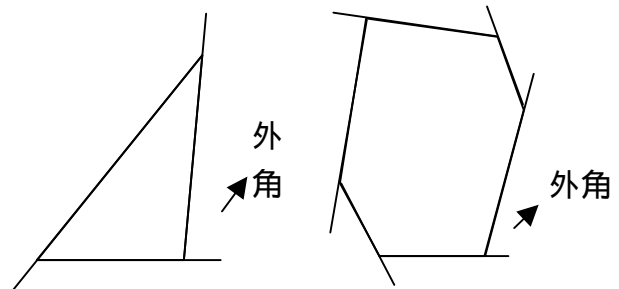
05. 甲的 25% 與乙的 6 成之比值為 $5/7$ ，現已知甲與乙皆為 50 至 100 間的整數，試求甲與乙之和？

Ans: 152 ...比例問題，設比例常數：

$$\frac{a/4}{3b/5} = \frac{5a}{12b} = \frac{5}{7} \Rightarrow a:b = 12:7, a = 12X, b = 7X \Rightarrow 50 \leq 12X, 7X \leq 100 \Rightarrow X = 8 \Rightarrow a + b = 19X = 152$$

06. 六邊形的外角和是三角形外角和的幾倍？

Ans: 1 倍



07. 有一個數（0 除外）除以 6，所得到的商數和餘數相同，請問這樣的數共有多少個？

Ans: 5 $x = 6a + a, 0 \leq a \leq 5, x \neq 0 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4, 5$

08. 第二次月考的數學試題共有 25 道題，規定答對一題得 4 分，答錯一題扣 2 分，未答的題不得分，小明這次得了 70 分，又知他未答的題目數是奇數，請問他答錯了幾題？

Ans: 3 題

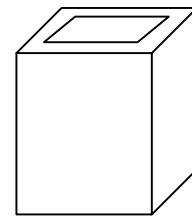
設對 x 題、錯 y 題、未答 z 題: $x + y \leq 25, 4x - 2y = 70 \Rightarrow 4x \geq 70 \Rightarrow x \geq 18$

x	18	19	20
y	1	3	5
z	6(X)	3	0(X)

09. 有一空心水泥柱(如圖)，由外觀看長、寬、高分別為 50、40、80 公分，已知內側的長、寬分別為 40、30 公分，則水泥柱所佔的體積為多少立方公分？

Ans: 64000

$$[(50 \times 40) - (40 \times 30)] \times 80 = 64000$$



10. 前 2007 個正偶數之和與前 2007 個正奇數之和的差為多少？

Ans: 2007... $2007_{\text{couples of (even-odd)}} \times [(2n) - (2n-1)]_{\text{even-odd}} = 2007$

乙. 11~20 題每題 5 分

11. 13^{2007} 的個位數字為何？

Ans: 7...找循環周

$$\text{期} \dots 13^4 \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 2007 = 4 \times 501 + 3 \Rightarrow 13^{2007} \equiv 13^3 \equiv 3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

12. 三個質數的倒數和是 $\frac{551}{2431}$ ，那麼這三個質數的和是多少？

Ans: 41 ... $2431 = 11 \times 13 \times 17$

$$11 + 13 + 17 = 41$$

13. 如果 $\frac{B}{A} = 2$ ， $\frac{C}{B} = 3$ ，那麼 $\frac{A+B}{B+C}$ 的值是多少？（請用小數表示）

Ans: 0.375

$$\frac{B}{A} = 2 \Rightarrow B = 2A; \frac{C}{B} = 3 \Rightarrow C = 3B = 6A$$

$$\frac{A+B}{B+C} = \frac{A+2A}{2A+6A} = \frac{3}{8} = 0.375$$

14. 小明考國語、數學、社會、自然四科，國語與社會之平均為 78 分，社會與自然之平均為 71 分，自然與數學之平均為 65 分。請問這次月考小明的平均分數是多少？

Ans: 71.5... 國 + 社 = 156 ... (1); 社 + 自 = 142 ... (2); 自 + 數 = 130 ... (3)
 (1) + (3) = 國 + 社 + 自 + 數 = 286
 四科平均 $286 \div 4 = 71.5$

15. 已知兩個小數的乘積經四捨五入以後是 22.5，若這兩個數的小數點後都只有一位小數，且個位數字都是 4；試問這兩個小數的和是多少？

Ans: 9.5... 4.6×4.9

設兩數為 $(4+a)$ 、 $(4+b)$

$$(4+a)(4+b) \approx 22.5$$

$$\Rightarrow 4(a+b) + ab \approx 6.5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(a+b) = 6 \Rightarrow a+b = 1.5 \\ ab = 0.45 \sim 0.54 \Rightarrow a = 0.6, b = 0.9 \end{cases}$$

$$4.6 + 4.9 = 9.5$$

16. 設甲、乙為兩枚公正的硬幣，將硬幣甲投擲 4 次，硬幣乙投擲 3 次。試問兩枚硬幣出現人頭次數相同的機率為多少？

Ans: $\frac{35}{128}$... 兩人”皆”擲出 0 次或 1 次或 2 次或 3 次人頭:

$$\left[C_0^4 \left(\frac{1}{2} \right)^0 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \times C_0^3 \left(\frac{1}{2} \right)^0 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right] + \left[C_1^4 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times C_1^3 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] + \left[C_2^4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times C_2^3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \right] + \left[C_3^4 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \times C_3^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^0 \right] = \frac{35}{128}$$

17. 有多少個正整數的平方可以整除 $3! \times 5! \times 7!$ ？

Ans: 30 ... $3! \times 5! \times 7! = 2^3 \times 3! \times 5! \times 7! = 2^3 \times 3! \times 5! \times 7! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$
 $\Rightarrow 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7^w \text{ s.t. } x=0, 2, 4, 6, 8, y=0, 2, 4, z=0, 2, w=0 \Rightarrow \text{Ans} = 5 \times 3 \times 2 \times 1 = 30$

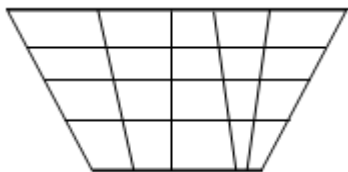
18. 國北教大排球隊欲購買襪子與 T 恤給球員，每雙襪子需 80 元且每件 T 恤較一雙襪子貴 100 元，每位球員需要 2 雙襪子及 2 件 T 恤。若總費用為現金 47320 元，試問國北教大排球隊共有多少位球員？

Ans: 91... $47320 \div (2 \times 80 + 2 \times 180) = 91$

19. 有 12 個正因數的最小正整數為何？

ANS: 60 ($12 = 12(2^{11}) = 6 \times 2(2^5 \times 3^1) = 4 \times 3(2^3 \times 3^2) = 3 \times 2 \times 2(2^2 \times 3^1 \times 5^1)$)

20. 如下圖所示，請問圖形中共有梯形幾個？



Ans: 150 個 ...仿長方形計數處理，橫縱分別取 2 條邊線： $\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} = 10 \times 15 = 150$

丙. 21~30 題每題 6 分

21. 如圖，正方形 ABCD 中，I J L K 為正方形，已知正方形 EFGH 的面積 30 平方公分，且四個長方形 AFLE, BGI F, CH JG, DHKE 的面積總和 38 平方公分，試問四個長方形 AFLE, BGI F, CH JG, DHKE 的周長共是多少公分？

Ans: 56 公分

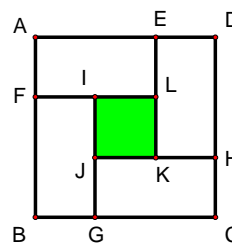
設 $\overline{AF} = x$; $\overline{AE} = y$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 30 \\ xy = \frac{38}{4} = \frac{19}{2} \end{cases}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 30 + 2 \cdot \frac{19}{2} = 49$$

$$x + y = 7$$

$$\text{周長} = 8 \cdot (x + y) = 8 \cdot 7 = 56$$



22. 已知 5555 除以 13 餘 4, 55555 除以 13 餘 6, 555555 可以被 13 整除, 試問一個由 5 組成的 2007 位數除以 13 的餘為何？

Ans: 9...本題前端條件敘述極易讓人誤解它有一定發展規律, 但在 6 個 5 可以被 13 整除的條件給定後, 完全失效. 故需利用算盤展開式來處理這種高位數字問題.

$$\underbrace{555555 \cdots 555555}_{2007=6 \times 334 + 3} \div 13 = (555555 \times 10^{2007-6 \times 1} + \cdots + 555555 \times 10^{2007-6 \times 334} + 555) \div 13$$

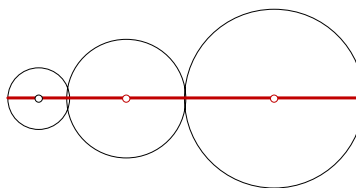
故, 所求之餘恰為 555 除以 13 之餘 9

23. 有三個齒輪組成一個齒輪組, 大的直徑是 60 公分, 中的直徑是 50 公分, 小的直徑是 40 公分, 將這三個齒輪的中心用紅色油漆連成一線, 然後轉動大齒輪, 請問中齒輪至少要轉幾圈, 這三個齒輪的紅色直徑才會再連成一線？

Ans: 6 圈

$$[20, 25, 30] = 300$$

$$300 \div 50 = 6 \text{ (圈)}$$



24. 若正整數 n 滿足下列兩個條件：

(1) n 為 15 的倍數

(2) n 的每一位數字是 0 或是 4

則滿足這樣條件之最小的 n 值是多少？

Ans: 4440...

$$n = \overbrace{\left(\underbrace{4}_{\text{fixed}} \cdots \underbrace{0}_{n-2} \cdots \underbrace{4}_{\text{fixed}} \right)}^{4 \times x + 0 \times (n-x) = 4x} \Rightarrow 3 \mid 4x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \min = 4440_{n-x=n-3=1}$$

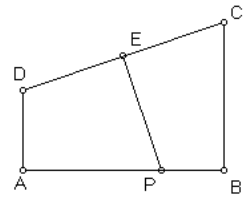
25. 如圖，梯形 $ABCD$ 中，若兩底長 $\overline{AD} = 20$ ， $\overline{BC} = 30$ ，高 $\overline{AB} = 40$ ，且 \overline{CD} 之中垂線交 \overline{AB} 於

P 點，求 $\overline{AP} = \frac{b}{a}$ ，其中 a, b 為正整數， $(a, b) = 1$ 。則 $2a + b = ?$

Ans: 113...

$$20^2 + x^2 = \overline{DP}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{PE}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{PE}^2 = \overline{PC}^2 = 30^2 + (40 - x)^2$$

$$\Rightarrow \overline{AP} = x = \frac{105}{4} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = 4, b = 105 \Rightarrow 2a + b = 113$$



26. 將一個四位數的數字依序顛倒過來，得到一個新的四位數；如果新數比原數大 7083，則所有滿足這個條件的原來四位數中最小是多少？

Ans: 1018...

設新數為 $abcd$ ：

$$abcd - dcba = (1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + 1 \times d) - (1000 \times d + 100 \times c + 10 \times b + 1 \times a)$$

$$= 999 \times a + 90 \times b - 90 \times c - 999 \times d = 999 \times (a - d) + 90 \times (b - c) = 7083 = 999 \times 7 + 90 \times 1$$

$$\Rightarrow a - d = 7, b - c = 1 \Rightarrow \min : a = 8 (d = 1), b = 1 (c = 0) \Rightarrow abcd = 8101$$

.... 四位數 $ad \neq 0$ 原數 $dcba$ 為 1018

27. 試問有多少個正整數 n ，使得 $1 + 2 + \cdots + n$ 可整除 $9n$ ？

Ans: 5...

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} \mid 9n$$

$$\Rightarrow n+1 \mid 18, 2 \mid n(n+1) \Rightarrow n+1 = 1, 2, 3, 6, 9, 18 \Rightarrow n = 0(\times), 1, 2, 5, 8, 17$$

28. 數學競試滿分是 100 分。A, B, C, D, E 五人參加了這次的考試。

A 說："我得了 94 分。"

B 說："我在 5 人中得分最高。"

C 說："我的得分是 A 和 D 的平均分數。"

D 說："我的得分恰好是 5 人的平均分數。"

E 說："我比 C 多得 2 分，我在是 5 人中得分第二高。"

請問 D 得了幾分？

Ans: 96 分

分數高低依序為 B, E, D, C, A

$$A = 94 \Rightarrow \begin{cases} D = 96 \Rightarrow C = 95; B + E = 195 \\ D = 98 \Rightarrow C = 96; B + E = 202 \Rightarrow (\text{不合}) \end{cases}$$

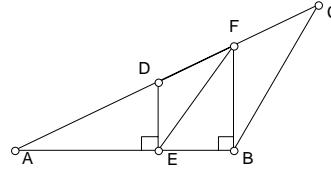
D 得 96 分

29. 如圖，在鈍角三角形 ABC 中，D 點為線段 AC 之中點，線段 DE 垂直線段 AB，線段 BF 垂直線段 AC，若三角形 ABC 的面積為 36，則三角形 AEF 的面積為何？

Ans: 18

連接 \overline{DB} ； $a\Delta DGF = a\Delta EGB$

$$\therefore a\Delta AEF = a\Delta ABD = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$$



30. 99 到 990 的正整數中，其各數字恰含一個 0 有幾個？

Ans: 162...

10(1~9)...101~109; 20(1~9)...201~209;...; 90(1~9)...901~909.,

1(1~9)0...110~190; 2(1~9)0...210~290;...; 9(1~9)0...910~990 $\Rightarrow 9 \times (9+9) = 162$